Optellen en aftrekken

Om **gelijknamige** breuken op te tellen of af te trekken hoeven we **alleen de tellers** op te tellen of af te trekken.
De noemer blijft hetzelfde.

Om breuken met **verschillende noemers** op te tellen of af te trekken moeten we de breuken eerst **gelijknamig maken**.

Vermenigvuldigen en delen

Om breuken met elkaar te **vermenigvuldigen** moeten we de **tellers** met elkaar vermenigvuldigen en de **noemers** met elkaar vermenigvuldigen.

$$\frac{\text{teller}}{\text{noemer}} \cdot \frac{\text{teller}}{\text{noemer}} = \frac{\text{teller} \cdot \text{teller}}{\text{noemer} \cdot \text{noemer}}$$

Om een breuk te **delen** delen door een andere breuk, moeten we de eerste breuk vermenigvuldigen met het **omgekeerde** van de andere breuk.

$$\frac{\text{teller}}{\text{noemer}} \div \frac{\text{teller}}{\text{noemer}} = \frac{\text{teller}}{\text{noemer}} \cdot \frac{\text{noemer}}{\text{teller}} = \frac{\text{teller} \cdot \text{noemer}}{\text{noemer} \cdot \text{teller}}$$

---- Voorbeeld 1 ----

Gelijknamige breuken optellen:

$$\frac{4+2a}{c} + \frac{3+a}{c}$$

Oplossing

$$\frac{7+3a}{c}$$

Uitleg:

Omdat de breuken $\frac{4+2a}{c}$ en $\frac{3+a}{c}$ dezelfde noemer hebben kunnen we de tellers bij elkaar optellen. De noemer blijft hetzelfde:

$$\frac{4+2a}{c} + \frac{3+a}{c} = \frac{4+2a+3+a}{c}$$
$$= \frac{7+3a}{c}$$

---- Voorbeeld 2 ----

Gelijknamige breuken aftrekken:

$\frac{4+2a}{c} - \frac{3+a}{c}$

Oplossing

$\frac{1+a}{c}$

Uitleg:

Omdat de breuken $\frac{4+2a}{c}$ en $\frac{3+a}{c}$ dezelfde noemer hebben kunnen we de tellers van elkaar aftrekken. De noemer blijft hetzelfde:

$$\frac{4+2a}{c} - \frac{3+a}{c} = \frac{4+2a-3-a}{c}$$
$$= \frac{1+a}{c}$$

----- Voorbeeld 3 -----

Breuken met verschillende noemers optellen:

$\frac{7}{x} + \frac{2}{y}$

Oplossing:

$\frac{7y+2x}{xy}$

Uitleg:

De breuken moeten eerst gelijknamig gemaakt worden. Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de twee breuken is xy. Bij gelijknamige breuken kunnen we de tellers optellen.

$$\frac{7}{x} + \frac{2}{y} = \frac{7 \cdot y}{x \cdot y} + \frac{2 \cdot x}{y \cdot x}$$
$$= \frac{7y+2x}{xy}$$

----- Voorbeeld 4 -----

Breuken met verschillende noemers aftrekken:

$\frac{7}{x} - \frac{2}{y}$

Oplossing:

$\frac{7y-2x}{xy}$

Uitleg:

De breuken moeten eerst als gelijknamig gemaakt worden. Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de twee breuken is xy. Bij gelijknamige breuken kunnen we de tellers van elkaar aftrekken.

$$\frac{7}{x} - \frac{2}{y} = \frac{7 \cdot y}{x \cdot y} - \frac{2 \cdot x}{y \cdot x}$$
$$= \frac{7y - 2x}{xy}$$

----- Voorbeeld 1 -----

Breuken vermenigvuldigen:

$\frac{2c}{a} \cdot \frac{7}{ab}$

Oplossing:

$\frac{14c}{a^2b}$

Uitleg:

Om twee breuken met elkaar te vermenigvuldigen moeten we de tellers met elkaar vermenigvuldigen en de noemers met elkaar vermenigvuldigen:

$$\frac{2c}{a} \cdot \frac{7}{ab} = \frac{2c \cdot 7}{a \cdot ab}$$
$$= \frac{14c}{a^2b}$$

----- Voorbeeld 2 -----

Breuken delen:

$\frac{2c}{a} \div \frac{7}{ab}$

Oplossing:

$\frac{2bc}{7}$

Uitleg:

Om een breuk te delen door de tweede moeten we de eerste breuk vermenigvuldigen met het **omgekeerde** van de tweede breuk.

$$\frac{2c}{a} \div \frac{7}{ab} = \frac{2c}{a} \cdot \frac{ab}{7}$$

$$= \frac{2c \cdot ab}{a \cdot 7}$$

$$= \frac{2abc}{7a}$$

$$= \frac{2bc}{7}$$

Breuken met variabelen **vermenigvuldigen** doen we door teller met teller en noemer met noemer te vermenigvuldigen.

$$\frac{\text{teller}}{\text{noemer}} \cdot \frac{\text{teller}}{\text{noemer}} = \frac{\text{teller x teller}}{\text{noemer x noemer}}$$

Breuken met variabelen **delen** doen we door de eerste breuk te vermenigvuldigen met het omgekeerde van de tweede breuk.

$$\frac{\text{teller 1}}{\text{noemer 1}} \div \frac{\text{teller 2}}{\text{noemer 2}} = \frac{\text{teller 1 x noemer 2}}{\text{noemer 1 x teller 2}}$$

Denk eraan dat er soms haakjes moeten worden gebruikt.

---- Voorbeeld 1 ----

Voeg de volgende termen samen:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{2x+3}{x^2-1}$$

Oplossing

$$\frac{2x+3}{x^3-x}$$

Uitleg:

Breuken vermenigvuldigen betekent dat we teller met teller en noemer met noemer moeten vermenigvuldigen.

Zo ontstaat:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} \cdot \frac{2x+3}{x^2-1} &= \frac{1 \cdot (2x+3)}{x \cdot (x^2-1)} \\ &= \frac{2x+3}{x^3-x}\end{aligned}$$

---- Voorbeeld 2 ----

Voeg de volgende termen samen:

$$\frac{1}{x} \div \frac{2x+3}{x^2-1}$$

Oplossing

$$\frac{x^2-1}{2x^2+3x}$$

Uitleg:

Breuken delen betekent vermenigvuldigen met het omgekeerde van de tweede breuk.

Zo ontstaat:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} \div \frac{2x+3}{x^2-1} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2-1}{2x+3}\\ &= \frac{1\cdot\left(x^2-1\right)}{x\cdot\left(2x+3\right)}\\ &= \frac{x^2-1}{2x^2+3x}\end{aligned}$$

---- Voorbeeld 3 ----

Voeg samen en vereenvoudig:

$$\frac{3}{8x} \cdot \frac{x^2}{9}.$$

Oplossing

$$\frac{x}{24}$$

Uitleg:

Deze breuken kunnen we eerst vereenvoudigen voordat we ze vermenigvuldigen.

Zo ontstaat:

$$\begin{aligned}\frac{3}{8x} \cdot \frac{x^2}{9} &= \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{9}\\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{x}{3}\\ &= \frac{x}{24}\end{aligned}$$

Vereenvoudigen van een breuk met variabelen

Breuken met variabelen kunnen we vaak vereenvoudigen.

Er is één voorwaarde: de teller en de noemer van de breuk hebben een grootste gemeenschappelijke deler (GGD) nodig.

Breuken vereenvoudigen:

Stap 1: Vind de GGD.
Stap 2: Deel de teller en de noemer door de GGD.

---- Voorbeeld 1 ----

Vereenvoudig $\frac{x^2}{x^3+x^2}$

Oplossing

$= \frac{1}{x+1}$

Uitleg:

Stap 1: Vind de GGD.

De GGD is x^2, want alle termen kunnen gedeeld worden door x^2.

Stap 2: Deel de teller en de noemer door de GGD.

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^2}{x^3+x^2} && \mid \text{ noemer ontbinden in factoren} \\
=&\frac{x^2}{x^2(x+1)} && \mid \text{ deel teller en noemer door } x^2 \\
=&\frac{1}{x+1}
\end{aligned}
$$

---- Voorbeeld 2 ----

Vereenvoudig $\frac{2x-6}{3-x}$

Oplossing

= -2

Uitleg:

Stap 1: Vind de GGD.

De GGD is $3-x$, want alle termen kunnen gedeeld worden door $3-x$.

Stap 2: Deel de teller en de noemer door de GGD.

$$\frac{2x-6}{3-x} \quad | \text{ teller ontbinden in factoren}$$
$$= \frac{-2(-x+3)}{3-x} \quad | \text{ deel teller en noemer door } (3-x)$$
$$= -2$$

---- Voorbeeld 3 ----

Vereenvoudig $\frac{-27x^2}{-3x^2-9x}$

Oplossing

$= \frac{9x}{x+3}$

Uitleg:

Stap 1: Vind de GGD.

De GGD is $-3x$, want alle termen kunnen gedeeld worden door $-3x$.

Stap 2: Deel de teller en de noemer door de GGD.

$$\frac{-27x^2}{-3x^2-9x} \quad | \text{ de noemer ontbinden in factoren}$$
$$= \frac{-3x \cdot 9x}{-3x(x+3)} \quad | \text{ deel teller en noemer door } (-3x)$$
$$= \frac{9x}{x+3}$$

---- Voorbeeld ----

Vereenvoudig $\frac{6x}{3x+12}$

Oplossing

$= \frac{2x}{x+4}$

Uitleg:

Stap 1: Vind de GGD.

De GGD is 3, want alle termen kunnen gedeeld worden door 3.

Stap 2: Deel de teller en de noemer door de GGD.

$$\frac{6x}{3x+12} \quad | \text{ de noemer ontbinden in factoren}$$
$$= \frac{3 \cdot 2x}{3(x+4)} \quad | \text{ deel teller en noemer door 3}$$
$$= \frac{2x}{x+4}$$

Breuk met variabelen gelijknamig maken

We kunnen een breuk met variabelen gelijknamig maken door de teller en de noemer te vermenigvuldigen met dezelfde factor.
Denk eraan dat we soms haakjes gebruikt moeten worden.

Hieronder staat een voorbeeld. De factor boven en onder de pijlen is waarmee we $\frac{1}{x}$ vermenigvuldigen.

$$\overset{\cdot(-3x+2)}{\frac{1}{x} = \frac{-3x+2}{x(-3x+2)}}_{\cdot(-3x+2)}$$

---- Voorbeeld 1 ----

Bewerk $\frac{7x+1}{x}$, zodat de noemer $x(x+2)$ wordt.

Oplossing

$$\frac{7x+1}{x} = \frac{7x^2+15x+2}{x(x+2)}$$

Uitleg:

De noemer x moet $x(x+2)$ worden. We vermenigvuldigen de noemer x met $x+2$.
Als we de noemer vermenigvuldigen, dan doen we dat ook met de teller.
We vermenigvuldigen de teller $7x+1$ met $x+2$. We krijgen dan $7x^2+15x+2$.

Zo ontstaat:

$$\frac{7x^2+15x+2}{x(x+2)}$$

---- Voorbeeld 2 ----

Bewerk $\frac{2x}{x^2+x}$ zodat de noemer $x^2(x+1)$ wordt.

Oplossing

$$\frac{2x^2}{x^2(x+1)}$$

Uitleg:

$$\frac{2x}{x^2+x} \quad | \text{ x ontbinden in factoren}$$

$$= \frac{2x}{x(x+1)} \quad | \text{ gelijknamig maken met x}$$

$$= \frac{2x^2}{x^2(x+1)}$$

- - - - -

Breuken met variabelen optellen en aftrekken

Je kunt twee of meer breuken met variabelen optellen of aftrekken op de volgende manier:

- maak alle breuken gelijknamig, zodat ze allemaal de kleinste gemeenschappelijke noemer hebben
- de tellers optellen of aftrekken, en de gemeenschappelijke noemer laten staan.

Denk eraan dat je soms haakjes moet gebruiken.

---- Voorbeeld 1 ----

Tel $\frac{8y}{3y^2+5}$ en $\frac{2y+4}{3y^2+5}$ op.

Oplossing

$\frac{10y+4}{3y^2+5}$

Uitleg:

De twee breuken hebben dezelfde noemer. Tel de tellers op en laat de noemer onveranderd staan.

$$\begin{aligned}\frac{8y}{3y^2+5}+\frac{2y+4}{3y^2+5}&=\frac{8y+2y+4}{3y^2+5}\\&=\frac{10y+4}{3y^2+5}\end{aligned}$$

---- Voorbeeld 2 ----

De breuken $\frac{9}{y+2}$ en $\frac{5y}{y+1}$ optellen .

Optellen

$\frac{5y^2+19y+9}{(y+2)(y+1)}$

Uitleg:

De noemers van de twee breuken zijn niet hetzelfde. Maak de breuken eerst gelijknamig met hun kleinste gemeenschappelijke noemer $(y+2)(y+1)$.

$$\frac{9}{y+2}\overset{\cdot(y+1)}{\underset{\cdot(y+1)}{=}}\frac{9(y+1)}{(y+2)(y+1)}=\frac{9y+9}{(y+2)(y+1)}$$

$$\frac{5y}{y+1}=\frac{5y(y+2)}{(y+1)(y+2)}=\frac{5y^2+10y}{(y+1)(y+2)}$$

Nu de tellers optellen.

$$\begin{aligned}\frac{9}{y+2}+\frac{5y}{y+1}&=\frac{9y+9}{(y+2)(y+1)}+\frac{5y^2+10y}{(y+1)(y+2)}\\&=\frac{9y+9+5y^2+10y}{(y+2)(y+1)}\\&=\frac{5y^2+19y+9}{(y+2)(y+1)}\end{aligned}$$

----- Voorbeeld 3 -----

Trek $\frac{1}{y-1}$ af van $\frac{5y}{(y-1)^2}$.

Aftrekken

$$\frac{5y}{(y-1)^2}-\frac{1}{y-1}=\frac{4y+1}{(y-1)^2}$$

Uitleg:

De noemers van de breuken zijn niet hetzelfde. Maak de breuken eerst gelijknamig met hun kleinste gemeenschappelijke noemer $(y-1)^2$.

$$\frac{1}{y-1}=\frac{1(y-1)}{(y-1)^2}=\frac{y-1}{(y-1)^2}$$

$\frac{5y}{(y-1)^2}$ blijft onveranderd.

Nu de teller aftrekken.

$$\begin{aligned}\frac{5y}{(y-1)^2}-\frac{1}{y-1}&=\frac{5y}{(y-1)^2}-\frac{y-1}{(y-1)^2}\\&=\frac{5y-(y-1)}{(y-1)^2} && \text{| Vergeet de haakjes niet!}\\&=\frac{5y-y+1}{(y-1)^2}\\&=\frac{4y+1}{(y-1)^2}\end{aligned}$$

---- Voorbeeld 4 ----

Herleid $\frac{2}{y-2} - 3$.

Neem de termen samen

$$\frac{2}{y-2} - 3 = \frac{-3y+8}{y-2}$$

Uitleg:

Maak 3 gelijknamig met $y-2$.

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{3(y-2)}{y-2} \\ &= \frac{3y-6}{y-2} \end{aligned}$$

De breuken hebben nu gelijke noemers.

$$\begin{aligned} \frac{2}{y-2} - 3 &= \frac{2}{y-2} - \frac{3y-6}{y-2} \\ &= \frac{2-(3y-6)}{y-2} \\ &= \frac{2-3y+6}{y-2} \\ &= \frac{-3y+8}{y-2} \end{aligned}$$

De kleinste gemeenschappelijke noemer vinden

In dit hoofdstuk leren we rekenen met breuken met variabelen. We zullen straks leren hoe we deze breuken optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen. Voordat we met breuken kunnen rekenen, moeten de breuken eerst gelijknamig zijn.

We hebben net geleerd dat we breuken gelijknamig kunnen maken door de teller en de noemer met hetzelfde te vermenigvuldigen. Maar met wat moeten we eigenlijk vermenigvuldigen?

Om twee breuken met variabelen gelijknamig te maken hebben we de **kleinste gemeenschappelijke noemer** nodig. Dit is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de noemers.

Om de kleinste gemeenschappelijke noemer te vinden:
- moeten we allebei de noemers ontbinden in factoren
- en vermenigvuldigen we de hoogste machten met elkaar.

----- Voorbeeld 1 -----

Vind de kleinste gemeenschappelijke noemer van de breuken $\frac{1}{x^2+x}$ en $\frac{1}{2x}$.

Oplossing

De kleinste gemeenschappelijke noemer is $2x(x+1)$.

Uitleg:

Ontbind de noemers in factoren
$x^2+x=x\cdot(x+1)$ en
$2x=2\cdot x$

Schrijf het product van de factoren. Gebruik de variabelen met de hoogste exponenten.
$2\cdot x\cdot(x+1)$

----- Voorbeeld 2 -----

Vind de kleinste gemeenschappelijke noemer van de breuken $\frac{1}{x^2+1}$ en $\frac{1}{x+3}$.

Oplossing

De kleinste gemeenschappelijke noemer is $(x^2+1)(x+3)$.

Uitleg:

Geen van beide noemers kan worden ontbonden in factoren: elke noemer is een factor op zich.
Bovendien zijn de noemers onderling ondeelbaar. In dat geval vermenigvuldig je de noemers met elkaar.

We schrijven het product van de twee noemers:
$(x^2+1)\cdot(x+3)$